

IZVIJANJE



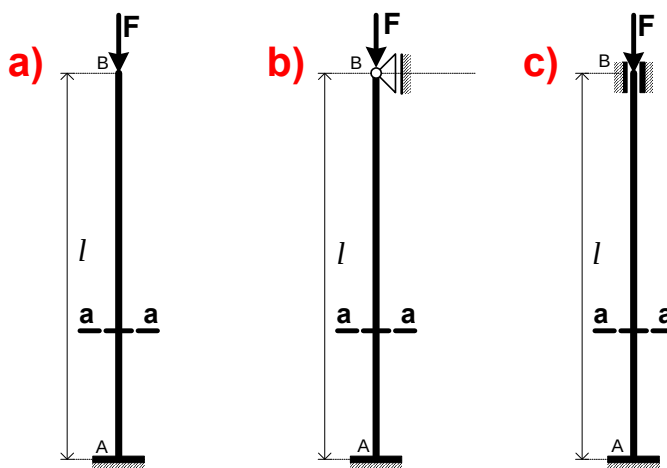
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

ZAVOD ZA TEHNIČKU MEHANIKU

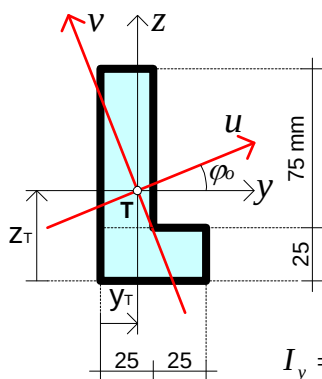
ZADATAK 11.

Iz uvjeta stabilnosti štapa **AB** duljine $l = 3,0 \text{ m}$ treba odrediti veličine dopuštenih sila za 3 slučaja pridrzanja štapa na kraju **B**. U sva tri slučaja štap je upet na kraju **A**.

Zadano je: - modul elastičnosti materijala $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 - granica proporcionalnosti $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$
 - koeficijent sigurnosti protiv izvijanja $k_i = 1,8$.



PRESJEK a – a



Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka:

$$A = 50 \cdot 25 + 25 \cdot 75 = 3125 \text{ mm}^2$$

$$z_T = \frac{1}{3125} \cdot (50 \cdot 25 \cdot 12,5 + 25 \cdot 75 \cdot 62,5) = 42,5 \text{ mm}$$

$$y_T = \frac{1}{3125} \cdot (50 \cdot 25 \cdot 25 + 25 \cdot 75 \cdot 12,5) = 17,5 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{50 \cdot 25^3}{12} + 50 \cdot 25 \cdot 30^2 + \frac{25 \cdot 75^3}{12} + 25 \cdot 75 \cdot 20^2 = 2819,01 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{25 \cdot 50^3}{12} + 25 \cdot 50 \cdot 7,5^2 + \frac{75 \cdot 25^3}{12} + 75 \cdot 25 \cdot 5^2 = 475,26 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 50 \cdot 25 \cdot (-30) \cdot (+7,5) + 25 \cdot 75 \cdot (+20) \cdot (-5) = -468,75 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{u,v} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2} = (1647,135 \pm 1262,148) \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_u = 2909,283 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 = I_{\max}$$

$$I_v = 384,987 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 = I_{\min}$$

$$\text{Kontrola: } I_u + I_v = I_y + I_z \Rightarrow 3294,27 \cdot 10^3 = 3294,27 \cdot 10^3$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_o = \frac{-2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} = +0,40 \quad \varphi_o = +10^\circ 54' 2,5''$$

$$i_u = i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{2909,283 \cdot 10^3}{3125}} = 30,51 \text{ mm}$$

$$i_v = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{384,987 \cdot 10^3}{3125}} = 11,099 \text{ mm}$$

Do **izvijanja (gubitka stabilnosti)** dolazi kada veličina sile postigne **kritičnu vrijednost**, a izračunavamo je pomoću Eulerovog izraza:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2}.$$

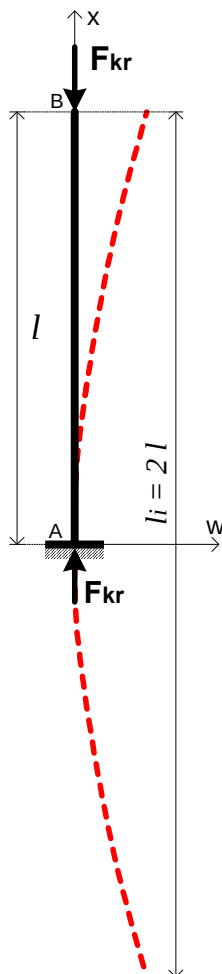
Izvijanja nastaje u ravnini najmanje fleksijske krutosti štapa, zato je u gornjem izrazu $I_{\min}$ - **minimalni moment tromosti** poprečnog presjeka štapa.

l_i - **duljina izvijanja** (duljina između dviju susjednih točaka infleksije elastične linije izvijenog štapa).

Eulerov izraz za kritičnu silu vrijedi u **elastičnom području**, pa treba provjeriti da je vitkost štapa (λ) veća od vitkosti koja odgovara granici proporcionalnosti (λ_p), odnosno da je $\lambda > \lambda_p$.

Vitkost štapa je $\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}}$, a vitkost koja odgovara granici proporcionalnosti $\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$.

SLUČAJ a) Štap je na kraju B slobodan (konzola)



$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 101,8$$

$$l_i = 2 \cdot l = 2 \cdot 3,0 = 6,0 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}} = \frac{6000}{11,099} = 540,6 > \lambda_p = 101,8$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 384,987 \cdot 10^3}{6000^2} = 22164,74 \text{ N}$$

$$F_{kr} = 22,16 \text{ kN}$$

Pa je **dopušteno opterećenje štapa** pri izvijanju:

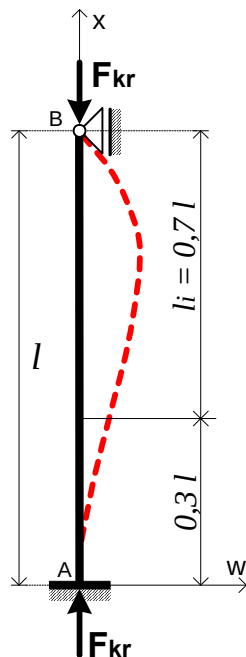
$$F_{idop} = \frac{F_{kr}}{k_i} = \frac{22,16}{1,8} = 12,31 \text{ kN}$$

Kritično naprezanje u trenutku izvijanja iznosi:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{540,6^2} = 7,09 \text{ MPa},$$

$$\text{a stvarno naprezanje u štapu: } \sigma_{idop} = \frac{F_{idop}}{A} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i} = \frac{7,09}{1,8} = 3,94 \text{ MPa}.$$

SLUČAJ b) Štap je na kraju B zglobno oslonjen



$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 101,8$$

$$l_i = 0,7 \cdot l = 0,7 \cdot 3,0 = 2,1 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}} = \frac{2100}{11,099} = 189,2 > \lambda_p = 101,8$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 384,987 \cdot 10^3}{2100^2} = 180936,64 \text{ N}$$

$$F_{kr} = \underline{180,94 \text{ kN}}$$

Pa je **dopušteno opterećenje štapa** pri izvijanju:

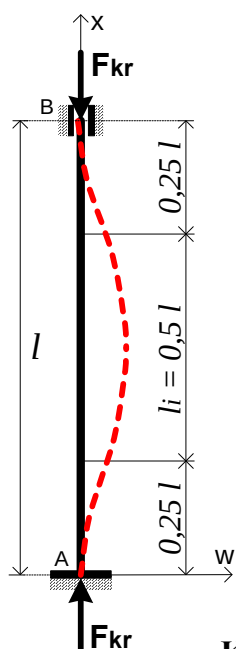
$$F_{idop} = \frac{F_{kr}}{k_i} = \frac{180,94}{1,8} = \underline{100,52 \text{ kN}}$$

Kritično naprezanje u trenutku izvijanja iznosi:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{189,2^2} = 57,90 \text{ MPa},$$

a stvarno naprezanje u štapu: $\sigma_{idop} = \frac{F_{idop}}{A} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i} = \frac{57,90}{1,8} = 32,17 \text{ MPa}.$

SLUČAJ c) Štap je na oba kraja upet



$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 101,8$$

$$l_i = 0,5 \cdot l = 0,5 \cdot 3,0 = 1,5 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}} = \frac{1500}{11,099} = 135,15 > \lambda_p = 101,8$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 384,987 \cdot 10^3}{1500^2} = 354635,81 \text{ N}$$

$$F_{kr} = \underline{354,636 \text{ kN}}$$

Pa je **dopušteno opterećenje štapa** pri izvijanju:

$$F_{idop} = \frac{F_{kr}}{k_i} = \frac{354,636}{1,8} = \underline{197,02 \text{ kN}}$$

Kritično naprezanje u trenutku izvijanja iznosi:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_i^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{l_i^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{135,15^2} = 113,47 \text{ MPa}$$

a stvarno naprezanje u štapu: $\sigma_{idop} = \frac{F_{idop}}{A} = \frac{\sigma_{kr}}{k_i} = \frac{113,47}{1,8} = 63,04 \text{ MPa}.$